***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Тульский государственный
педагогический университет им. Л.Н. Толстого
(ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л.Н. Толстого»)***

ВСОШ
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 2022/2023 учебного года

по астрономии

Составители:

Кожинин С.П.,

Овсянников В.В.,

Нургулеев Д.А.,

Иванов К.В.

Контактный тел.: +79101652433

Тула 2022

7 класс

7-1. Оцените время t (в секундах и годах), за которое звездолет совершит путешествие в соседнюю галактику, расстояние до которой $S = 10^{22}$ м. Скорость звездолета v = 3000 км/с. 1 год ≈ $3\cdot10^7$ с.

Решение

Скорость звездолета: $v = \dfrac{S}{t}$ **(1б)**

Время полета: $t = \dfrac{S}{v}$ **(1б)**

$t \approx 3\cdot10^{15}$ с **(3б)** → $t \approx 10^8$ лет **(3б)**

7-2. Какие созвездия изображены на этих рисунках? В какое время года лучше всего наблюдать каждое из представленных созвездий в Туле?

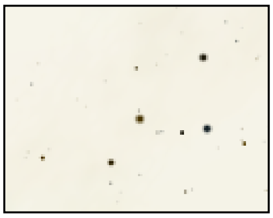
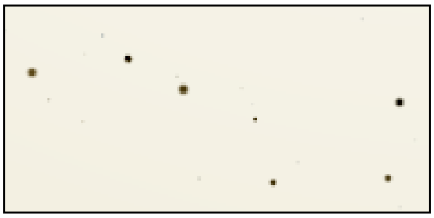
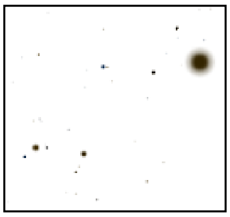
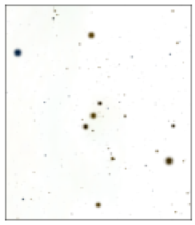





Рис 1. Рис 2. Рис 3. Рис 4.

Решение

За каждое правильно названное созвездие **1балл** и за условия видимости **1 балл**. Всего 8 баллов

Рис.1 Кассиопея (видно круглый год).
Рис.2 Большая Медведица (видно круглый год).
Рис.3 Лира (однако лучшие условия наблюдения – с мая по октябрь, относится к летним созвездиям).
Рис.4 Орион (наилучшие условия для наблюдений в ноябре–январе, относится к зимним созвездиям).

7-3. В какое время суток и в какой стороне горизонта можно увидеть серп молодой Луны?

Решение

Вечером после заката Солнца – **4б**.
В западной стороне горизонта – **4б**.

7-4. Обычный год лунного календаря состоит, как и солнечный, из 12 месяцев. Лунный месяц насчитывает 29,5 суток. Предположим, что отсчет обоих годов ведется от одной и той же выбранной даты (эпохи). В какой по порядку год лунного календаря и в какой половине этого года его отставание от солнечного календаря превысит один лунный месяц?

Решение

Продолжительность обычного года в лунном календаре составляет:

$29{,}5 \cdot 12 = 354$ суток **(2б).**

Следовательно, отставание лунного календаря от солнечного за год составит:

$365{,}25 - 354 = 11{,}25$ суток **(2б).**

За два года отставание составит 22,5 суток, что на 7 суток меньше лунного месяца **(1б).**

За три года отставание будет уже 33,75 суток, что на 4,25 суток больше лунного месяца **(1б).**

Следовательно, лунный календарь отстанет от солнечного на один лунный месяц во второй половине 3-го лунного года **(2б)**.

7-5. Фобос делает один оборот вокруг Марса за 7 часов 40 минут, а марсианские сутки примерно равны земным. В какой стороне марсианского горизонта наблюдается восход Фобоса? (Направления осевого вращения Марса и обращения Фобоса вокруг Марса совпадают.)

Решение

Угловая скорость Фобоса будет больше угловой скорости наблюдателя, находящегося на поверхности Марса **(4б)**.

Следовательно, относительно этого наблюдателя Фобос будет двигаться не с востока на запад, как все остальные светила, а с запада на восток **(2б)**.

Следовательно, Фобос будет восходить в западной стороне марсианского горизонта и заходить в восточной **(2б)**.

7-6. Реактивный авиалайнер летит со скоростью, соизмеримой с линейной скоростью поверхности Земли в средних широтах. Возможно ли, находясь на авиалайнере, дважды встретить восход? В каком географическом направлении должен лететь самолет, чтобы это произошло? Насколько продолжительным должно быть время полета?

Решение

Если самолет летит вдоль широтного круга, он непрерывно меняет свою долготу **(1б).**

Следовательно, его местное время непрерывно меняется **(1б)**.

Оно меняется в сторону уменьшения местного времени по сравнению с временем пункта вылета, если самолет летит с востока на запад, и в сторону увеличения, если самолет летит с запада на восток **(2б)**.

Если самолет летит со скоростью, равной скорости вращения Земли, то при движении с востока на запад для наблюдателя на самолете Солнце будет стоять на одном месте, а при движении с запада на восток, оно будет двигаться в два раза быстрее **(2б)**.

Следовательно, возможно два раза встретить восход Солнца в авиалайнере, если лететь около полусуток в направлении с запада на восток **(2б).**

8 класс

8-1. Солнце вращается вокруг своей оси с периодом $T = 2{,}2\cdot10^6$ с. Радиус Солнца $R = 7\cdot10^5$ км. Оцените скорость точек, лежащих на экваторе Солнца. Длина окружности радиуса R: $L = 2\pi R$, где $\pi = 3{,}14$.

Решение

Скорость движения точки по окружности: $v = \dfrac{L}{T} = \dfrac{2\pi R}{T}$ **(4б)**

$v \approx 2$ км/с **(4б)**

8-2. Оцените массу M астероида, средняя плотность вещества которого $\rho = 3$ г/см^3. Характерный размер астероида $R = 100$ км. Объем астероида: $V \approx R^3$.

Решение

Средняя плотность вещества астероида: $\rho = \dfrac{M}{V} \approx \dfrac{M}{R^3}$ **(3б)**

Его масса: $M \approx \rho R^3$. **(2б)**

$M \approx 3\cdot10^{18}$ кг. **(3б)**

8-3. Какие созвездия изображены на этих рисунках? В какое время года лучше всего наблюдать каждое из представленных созвездий в Туле?

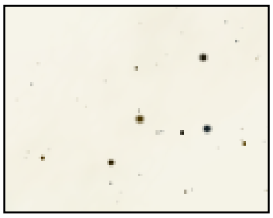


Рис 1.

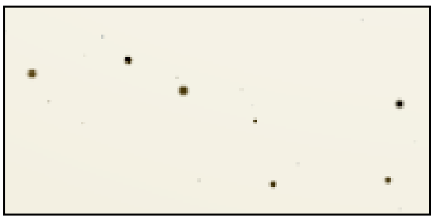


Рис 2.

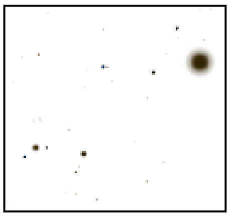


Рис 3.

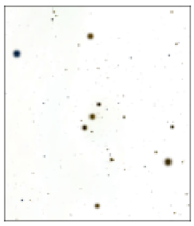


Рис 4.

Решение

За каждое правильно названное созвездие **1балл** и за условия видимости **1 балл**. Всего 8 баллов

Рис.1 Кассиопея (видно круглый год).
Рис.2 Большая Медведица (видно круглый год).
Рис.3 Лира (однако лучшие условия наблюдения – с мая по октябрь, относится к летним созвездиям).
Рис.4 Орион (наилучшие условия для наблюдений в ноябре–январе, относится к зимним созвездиям).

8-4. Обычный год лунного календаря состоит, как и солнечный, из 12 месяцев. Лунный месяц насчитывает 29,5 суток. Предположим, что отсчет обоих годов ведется от одной и той же выбранной даты (эпохи). В какой по порядку год лунного календаря и в какой половине этого года его отставание от солнечного календаря превысит один лунный месяц?

Решение

Продолжительность обычного года в лунном календаре составляет:

$29{,}5 \cdot 12 = 354$ суток **(2б).**

Следовательно, отставание лунного календаря от солнечного за год составит:

$365{,}25 - 354 = 11{,}25$ суток **(2б).**

За два года отставание составит 22,5 суток, что на 7 суток меньше лунного месяца **(1б).**

За три года отставание будет уже 33,75 суток, что на 4,25 суток больше лунного месяца **(1б).**

Следовательно, лунный календарь отстанет от солнечного на один лунный месяц во второй половине 3-го лунного года **(2б)**.

8-5. Фобос делает один оборот вокруг Марса за 7 часов 40 минут, а марсианские сутки примерно равны земным. В какой стороне марсианского горизонта наблюдается восход Фобоса? (Направления осевого вращения Марса и обращения Фобоса вокруг Марса совпадают.)

Решение

Угловая скорость Фобоса будет больше угловой скорости наблюдателя, находящегося на поверхности Марса **(4б)**.

Следовательно, относительно этого наблюдателя Фобос будет двигаться не с востока на запад, как все остальные светила, а с запада на восток **(2б)**.

Следовательно, Фобос будет восходить в западной стороне марсианского горизонта и заходить в восточной **(2б)**.

8-6. Реактивный авиалайнер летит со скоростью, соизмеримой с линейной скоростью поверхности Земли в средних широтах. Возможно ли, находясь на авиалайнере, дважды встретить восход? В каком географическом направлении должен лететь самолет, чтобы это произошло? Насколько продолжительным должно быть время полета?

Решение

Если самолет летит вдоль широтного круга, он непрерывно меняет свою долготу **(1б)**.

Следовательно, его местное время непрерывно меняется **(1б)**.

Оно меняется в сторону уменьшения местного времени по сравнению с временем пункта вылета, если самолет летит с востока на запад, и в сторону увеличения, если самолет летит с запада на восток **(2б)**.

Если самолет летит со скоростью, равной скорости вращения Земли, то при движении с востока на запад для наблюдателя на самолете Солнце будет стоять на одном месте, а при движении с запада на восток, оно будет двигаться в два раза быстрее **(2б)**.

Следовательно, возможно два раза встретить восход Солнца в авиалайнере, если лететь около полусуток в направлении с запада на восток **(2б)**.

9 класс

9-1. Пульсар.

Пульсар, радиус которого R = 15 км, вращается вокруг своей оси с некоторым периодом T. Каким может быть этот период? Скорость света в вакууме $c = 3\cdot10^5$ км/с.

Решение

Скорость точек, лежащих на экваторе пульсара, равна $v = \dfrac{2\pi R}{T}$. **(2б)**

Эта скорость не должна превышать скорость света в вакууме, т.е.

$$v < c. \quad \textbf{(2б)}$$

Из этого условия следует ограничение на период вращения пульсара:

$$T > \frac{2\pi R}{c}, \quad \textbf{(2б)} \quad \rightarrow \quad T > 3\cdot10^{-4}\ \text{с}. \quad \textbf{(2б)}$$

9-2. Нейтронная звезда.

Оцените радиус R (в см и км) нейтронной звезды, масса которой $M = 1{,}5\ M_\odot$. Средняя плотность вещества звезды $\rho = 2\cdot10^{14}$ г/см^3. Звезда имеет форму шара. Масса Солнца $M_\odot = 2\cdot10^{33}$ г.

Объем шара: $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$, *где* $\pi = 3{,}14$.

Решение

Масса звезды: $M = \rho V = \dfrac{4\pi\rho}{3}\cdot R^3$ **(2б)**

Радиус звезды: $R = \left(\dfrac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$ **(3б)** → $R \approx 1{,}5\cdot10^6$ см **(2б)** → R ≈ 15 км.

9-3. Космический аппарат в газовом облаке.

Космический аппарат (КА) попал в плотное газовое облако, характерный размер которого равен L = 4 а.е., а плотность $\rho = 10^{-10}$ кг/м^3. Сила сопротивления газовой среды, действующей на данный КА, прямо пропорциональна плотности среды и квадрату скорости КА: $F_c = 4\rho v^2$ (численный множитель определен в системе единиц «Си»). За счет работы двигательной установки КА движется в облаке прямолинейно и равномерно с установившейся скоростью v. Сила тяги двигательной установки определяется формулой $F = \mu\cdot u$, где μ – ежесекундный расход топлива, u – скорость истечения газа из сопла двигателя. При этом масса m КА уменьшается во времени t по линейному закону $m = m_0 - \mu t$, где m_0 – начальная масса КА, которую он имел до включения двигателя. С какой скоростью КА двигался в облаке? За какое время КА пролетел облако? Сколько топлива будет израсходовано за это время? Сила тяги двигателя равна F = 0,09 Н. Скорость истечения газов из сопла двигателя равна u = 30 км/с . 1 а.е. =150 млн.км.

Решение

Т.к. движение КА равномерное и прямолинейное, то $F = F_c$:

$$F = 4\rho v^2 \quad \textbf{(1б)} \quad \rightarrow \quad \text{скорость КА} \quad v = \sqrt{\frac{F}{4\rho}} = 15\ км/с. \quad \textbf{(3б)}$$

Облако будет пройдено за время $t = \dfrac{L}{v} = 4\cdot10^7\,с.$ **(1б)**

Ежесекундный расход топлива: $\mu = F/u = 3\cdot 10^{-6}$ кг/с. **(1б)**

Масса КА уменьшится на величину, равную массе израсходованного топлива:

$$|\Delta m| = m_0 - m = \mu \cdot t = \frac{F \cdot t}{u} = 120\,кг.$$ **(2б)**

9-4. Сверхмассивная черная дыра (СЧД) в центре нашей Галактики.

По некоторым оценкам масса СЧД составляет $M = 4\cdot 10^6\ M_\odot$. Оцените скорость v (км/с) звезды, которая движется вокруг СЧД по круговой орбите радиуса r = 1000 а.е. Оцените период обращения T (в годах) звезды вокруг СЧД.
Масса Солнца: $M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг.
Гравитационная постоянная: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.
1а.е. = $1{,}5\cdot 10^{11}$ м; 1 год ≈ $3{,}2\cdot 10^7$ с.

Решение

1. Орбитальная скорость звезды определяется из уравнения движения для круговых орбит

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$ **(1б)** → $$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$ **(1б)** → $v \approx 2\cdot 10^3$ км/с **(2б)**

2. Скорость движения звезды по круговой орбите радиуса r:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$ **(1б)** → период обращения: $$T = \frac{2\pi r}{v}$$ **(1б)** → T ≈ 15 лет **(2б)**

9-5. Горячая массивная звезда.

Оцените радиус R звезды (в единицах радиуса Солнца $R_\odot$), если ее светимость $L = 23000\ L_\odot$, а эффективная температура ее поверхности T = 13000 К. Эффективная температура поверхности Солнца $T_\odot$ = 5875 К. Оцените массу M звезды в единицах солнечной массы $M_\odot$, если для нее соотношение «светимость – масса» имеет вид $\frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^3$.

Решение:

Из определения светимости звезды следует: $$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4$$ **(2б)**

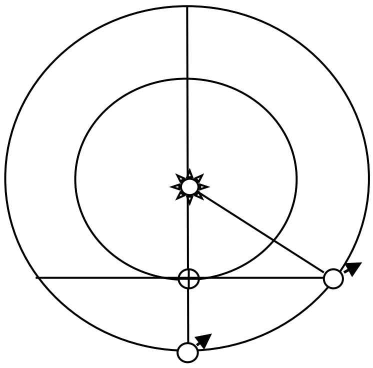
Радиус звезды: $$\frac{R}{R_\odot} = \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 \sqrt{\frac{L}{L_\odot}}$$ **(3б)** → $R \approx 31 R_\odot$ **(2б)**

Масса звезды: $M \approx 28 M_\odot$ **(1б)**

9-6. Блеск Марса.

Звездная величина Марса в противостоянии $m_п$ = – 2,1^m. Какова будет его звездная величина $m_к$ в квадратуре? Считать, что радиус орбиты Марса равен $r_М$ = 1,5 а.е., и что она круговая.

Решение



Блеск источника ослабляется пропорционально квадрату расстояния, с которого его наблюдает наблюдатель. Из рисунка видно, что в квадратуре Марс находится дальше от Земли, чем в противостоянии. При этом, поскольку орбита Марса считается круговой, от Солнца он получает одно и то же количество энергии (фазой можно пренебречь). Расстояние от Земли до Марса в противостоянии составит 0,5 а.е. Из рисунка видно, что расстояние от Земли до Марса в квадратуре составит $\sqrt{1{,}5^2 - 1^2}$ а. е. Следовательно, отношение блеска Марса в противостоянии ($I_п$) и в квадратуре ($I_к$) определится как:

$$\frac{I_п}{I_к} = \left(\frac{\sqrt{1{,}5^2-1^2}}{0{,}5}\right)^2 = 5$$ **4б**

Для перехода к оценке блеска в звездных величинах воспользуемся логарифмической формой записи формулы Погсона:

$$lg\left(\frac{I_п}{I_к}\right) = 0{,}4(m_к - m_п)$$

$$m_к = m_п + 2{,}5 \cdot lg\left(\frac{I_п}{I_к}\right)$$ **4б**

где $m_к$ и $m_п$ – звездные величины Марса в квадратуре и в противостоянии соответственно. После подстановки получим $m_к$ = – 0,4^m.

10 класс

10-1. Сверхмассивная черная дыра (СЧД) в галактике NGC 3258.

Массу СЧД можно оценить по орбитальным характеристикам газовых облаков, обращающихся вокруг СЧД. Одно из облаков находится на расстоянии $r = 4\cdot10^6$ а.е. от СЧД и движется вокруг нее по круговой орбите со скоростью v = 800 км/с. Оцените массу M (в единицах солнечной массы) СЧД. За сколько лет облако совершает один полный оборот вокруг СЧД?

1а.е. = $1{,}5\cdot10^{11}$ м; 1 год ≈ $3\cdot10^7$ с.

Масса Солнца: $M_\odot = 2\cdot10^{30}$ кг.

Гравитационная постоянная: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг².

Решение

1. Масса СЧД оценивается из уравнения движения для круговых орбит:

$$m\cdot\frac{v^2}{r} = m\cdot\frac{GM}{r^2} \qquad (1)$$

1б

Из (1):

$$M = \frac{r\,v^2}{G} \qquad (2)$$ **1б**

Из (2): $M \approx 6\cdot10^{39}$ кг; **1б**

$M \approx 3\cdot10^9\ M_\odot$ **1б**

2. Скорость движения облака по круговой орбите радиуса r:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad (3)$$ **1б**

Период обращения облака вокруг СЧД: из (3) -

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad (4)$$ **1б**

Из (4): $T \approx 5\cdot10^{12}$ с **1б**

$T \approx 2\cdot10^5$ лет **1б**

10-2. «Аполлон-11».

20 июля 1969 года лунный модуль космического корабля «Аполлон-11» совершил мягкую посадку на поверхность Луны. Командный модуль корабля оставался на круговой орбите, лежащей на высоте h = 110 км. Вычислите орбитальную скорость v командного модуля. В течении какого времени (в минутах) с лунного модуля можно было наблюдать пролет командного модуля? Осевое вращение Луны не учитывать. Считать, что траектория командного модуля относительно лунного модуля проходит через зенит.

Данные о Луне: масса $M = 7{,}35\cdot10^{22}$ кг; радиус R = 1730 км.

Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг².

Решение

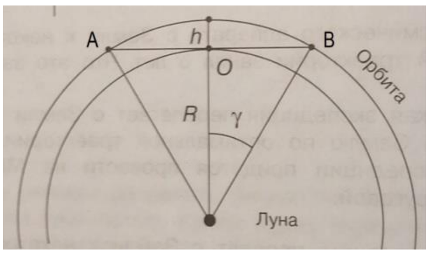


Рисунок: **(2б)**

Лунный модуль (ЛМ) находится в точке О.

АВ – линия горизонта.

Время пролета t командного модуля (КМ) над точкой O - это время движения КМ по дуге AB. Дуга AB опирается на линию горизонта AB и угол 2γ.

Длина дуги AB: $l = r \cdot 2\gamma = v \cdot t$, **(1б)**

где угол γ – в радианах; r = R + h = 1840 км – радиус орбиты КМ.

Орбитальная скорость КМ определяется из уравнения движения для круговых орбит

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \textbf{(1б)} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \textbf{(1б)} \quad \rightarrow \quad v = 1630 \text{ м/с.} \quad \textbf{(1б)}$$

Т.к.

$$\frac{R}{r} = \cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos\left(\frac{R}{r}\right) = 0,348\,рад\left(\approx 20^0\right)$$

(1б)

то время пролета –

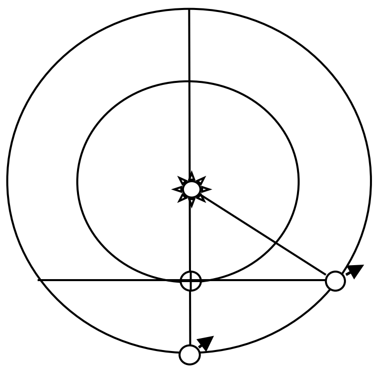
$$t = \frac{r \cdot 2\gamma}{v} \approx 786\,с \approx 13\,мин$$

(1б)

10-3. Блеск Марса.

Звездная величина Марса в противостоянии $m_п$ = – 2,1^m. Какова будет его звездная величина $m_к$ в квадратуре? Считать, что радиус орбиты Марса равен r_M = 1,5 а.е., и что она круговая.

Решение



Блеск источника ослабляется пропорционально квадрату расстояния, с которого его наблюдает наблюдатель. Из рисунка видно, что в квадратуре Марс находится дальше от Земли, чем в противостоянии. При этом, поскольку орбита Марса считается круговой, от Солнца он получает одно и то же количество энергии (фазой можно пренебречь). Расстояние от Земли до Марса в противостоянии составит 0,5 а.е. Из рисунка видно, что расстояние от Земли до Марса в квадратуре составит $\sqrt{1{,}5^2 - 1^2}$ а.е. Следовательно, отношение блеска Марса в противостоянии ($I_п$) и в квадратуре ($I_к$) определится как:

$$\frac{I_п}{I_к} = \left(\frac{\sqrt{1{,}5^2 - 1^2}}{0{,}5}\right)^2 = 5 \qquad \textbf{4б}$$

Для перехода к оценке блеска в звездных величинах воспользуемся логарифмической формой записи формулы Погсона:

$$lg\left(\frac{I_п}{I_к}\right) = 0{,}4(m_к - m_п)$$

$$m_к = m_п + 2{,}5 \cdot lg\left(\frac{I_п}{I_к}\right) \qquad \textbf{4б}$$

где $m_к$ и $m_п$ – звездные величины Марса в квадратуре и в противостоянии соответственно. После подстановки получим $m_к$ = – 0,4^m.

10-4. Геостационарная орбита.
На каком расстоянии от поверхности Земли h должен располагаться спутник, чтобы, обращаясь по круговой орбите, находиться всегда над одной и той же точкой земного экватора? Экваториальный радиус Земли считать равным $R = 6378$ км, массу Земли $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$. Сидерические сутки $T = 86164$ с.

Решение

Воспользуемся вторым законом Ньютона и законом всемирного тяготения:

$$ma = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$a = \frac{GM}{r^2} \qquad \textbf{2б}$$

Здесь a – ускорение, $r = (R + h)$ – расстояние до спутника от центра Земли, M и m – массы Земли и спутника соответственно, а G – гравитационная постоянная.

Из кинематики известно, что ускорение может быть представлено, как

$a = \omega^2 \cdot r$, где ω – угловая скорость спутника. **2б**

По условиям задачи угловая скорость спутника должна совпадать с угловой скоростью вращения Земли. Нам известен период вращения Земли T (одни сутки). Значит угловая скорость может быть определена, как

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \textbf{2б}$$

В итоге получим

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = \frac{GM}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} \qquad \textbf{2б}$$

После вычислений получим $r = 4{,}215 \cdot 10^7$ м $= 42150$ км. Откуда $h = 35772$ км.

Можно воспользоваться альтернативным способом решения через круговую скорость:

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$v_k = \omega \cdot r$$

Тогда за обе эти формулы выставляется по **2 балла**. Остальная часть решения аналогична первому способу.

10-5. От соединения до противостояния.
В противостоянии блеск планеты увеличился на 0,85 звездной величины по сравнению с блеском в соединении. Сколько суток планета двигалась от соединения до противостояния? Все орбиты считать круговыми.

Решение

1. Очевидно, что речь идет о внешней (верхней) планете. Если обозначить радиус орбиты внешней планеты как a и измерять ее в астрономических единицах, то расстояние от Земли до планеты в соединении будет $r_с = a + 1$, а в противостоянии $r_п = a - 1$. Именно разница этих расстояний дает увеличение блеска на $\Delta m = 0{,}85$ звездной величины.

Блеск I обратно пропорционален квадрату расстояния:

$$\frac{I_n}{I_c} = \left(\frac{r_c}{r_n}\right)^2$$

Но, согласно формуле Погсона:

$$\frac{I_n}{I_c} = 2{,}512^{\Delta m}$$

(В данном случае важно правильно задать отношение блесков, поскольку обратное отношение даст нам отрицательное значение Δm.) Приравнивая правые части этих уравнений, получим:

$$\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 = 2{,}512^{\Delta m}$$

Правая часть в выбранных единицах измерения численно равна примерно 2,2. Преобразуем записанное уравнение в квадратное:

$$a^2 - 5{,}3a + 1 = 0$$

Уравнение имеет действительные корни: $a_1 = 5{,}1\ а.е. и\ a_2 = 0{,}2\ а.е.$ Второе значение нас не интересует, поскольку оно характеризует внутреннюю (нижнюю) планету. (За правильное решение этой части задачи присваивается **4 балла**, за не совсем точное и не совсем корректное **от 1 до 3 баллов** по коллегиальному решению жюри.)

2. Очевидно, что искомое количество суток будет равно половине синодического периода внешней планеты. Сидерический период обращения планеты вокруг Солнца в годах найдем по третьему закону Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1$$

$$T = \sqrt{a^3}$$

$T = 11{,}5$ лет; а синодический период – по формуле для синодического периода внешней планеты:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{Земли}} - \frac{1}{T_{планеты}}$$

Получаем $S = 1{,}1$ лет или чуть менее 402 суток. То есть планета двигалась от соединения до противостояния 200 суток с небольшим. (За правильное решение этой части задачи также присваивается **4 балла** с аналогичными оговорками.)

10-6. Фобос в кульминации.

Сколько времени пройдет между двумя последовательными верхними кульминациями Фобоса для наблюдателя на Марсе, если выражать их в марсианских солнечных сутках? Период обращения Марса вокруг собственной оси относительно Солнца равен $24^ч\ 37^м$ среднесолнечного времени. Звездный период обращения Фобоса равен $7^ч\ 39^м$.

Решение

Для наблюдателя на Марсе Фобос будет двигаться относительно марсианского небесного меридиана в сторону с запада на восток, поскольку угловая скорость его прямого обращения вокруг Марса превышает угловую скорость также прямого обращения Марса вокруг своей оси. Скорость движения относительно меридиана составит разность соответствующих угловых скоростей:

$$\omega = \omega_{\Phi} - \omega_{M}$$

Угловая скорость определится очевидным образом, как:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Выразим 2π в минутах угловой дуги, а T – во временных минутах:

$$2\pi = 21600'$$

$$T_{\Phi} = 459^{м}$$

$$T_{M} = 1477^{м}$$

Найдем угловую скорость движения Фобоса относительно марсианского небесного меридиана:

$$\omega = \frac{21600'}{459^{м}} - \frac{21600'}{1477^{м}} = 32{,}43$$

То есть повторно к меридиану Фобос вернется через ${}^{21600'}/_{32{,}43} \approx 666^{м}$ среднесолнечного времени, что составит ${}^{666^{м}}/_{1477^{м}} = 0{,}45$ марсианских солнечных суток. Или, если представить, что на Марсе сутки также содержат ровно по 24 марсианских часа, кульминации будут наступать через каждые $10^{ч}\ 48^{м}$ марсианских среднесолнечных суток.

11 класс

11-1. Сверхмассивная черная дыра в центре Галактики.

Предполагается, что в центре нашей Галактики находится сверхмассивная черная дыра (СЧД), массу которой можно вычислить по данным об эллиптических орбитах ближайших к СЧД звезд. В настоящее время определены орбиты для ближайших к центру Галактики 28 звезд. Наиболее интересной среди них является звезда S2. За время наблюдений (1992—2002) было установлено:

- период ее обращения вокруг СЧД составил T = 15,2 года (1 год = $3{,}2\cdot 10^7$ с);
- большая полуось орбиты a = 1000 а.е. (1 а.е. = 150 млн. км).

Вычислите по этим данным массу M (в кг и в единицах солнечной массы) СЧД в центре нашей Галактики.

Гравитационная постоянная: G = $6{,}67\cdot 10^{-11}$ (Н·м²/кг²). Масса Солнца: $M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг.

Решение

Третий закон Кеплера: $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$, или $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM}}$. **(2б)**

Масса СЧД: $M = \left(\dfrac{2\pi a}{T}\right)^2 \cdot \dfrac{a}{G}$ **(2б)** $\rightarrow M = 8{,}4\cdot 10^{36}\,кг$ **(2б)** $\rightarrow M = 4{,}2\cdot 10^6 M_\odot$ **(2б)**

11-2. Коричневый карлик.

Данные об этой звезде следующие: радиус $R = 0{,}1R_\odot$; температура поверхности T = 1000К.

1). Оцените светимость L этой звезды (в Вт и единицах солнечной светимости $L_\odot = 4\cdot 10^{26}$ Вт). Постоянная Стефана – Больцмана $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴).

2). Оцените массу M этой звезды (в единицах солнечной массы $M_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг) при условии, что соотношение «светимость - масса» имеет вид

$$\frac{M}{M_\odot} = \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{5/2}.$$

3). Оцените температуру T_c в центре этой звезды. Молярную массу вещества звезды принять равной μ = 1 г/моль. Гравитационная постоянная G = $6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг². Универсальная газовая постоянная R^* = 8,31 Дж/(моль·К).

Решение

1). Светимость звезды: $L = 4\pi\sigma R^2T^4 \approx 4\cdot 10^{21}$ Вт $\approx 10^{-5} L_\odot$ **(2б)**

2). Масса звезды: $M = 0{,}01\ M_\odot$ **(1б)**

3). Температура в центре звезды оценивается из условия гидростатического равновесия звезды

$$\rho g R = \frac{\rho R^* T_c}{\mu}, \text{ где } g \approx \frac{GM}{R^2}. \quad \textbf{(3б)}$$

Температура в центре звезды:

$$T_c \approx \frac{\mu GM}{R^* R} \approx 2\cdot 10^6 K \quad \textbf{(2б)}$$

11-3. Гравитационная неустойчивость и рождение звезд.

Процесс звездообразования начинается с гравитационной неустойчивости плотных и холодных газопылевых облаков (Дж.Джинс,1902г.). Типичными местами формирования звезд являются мелкомасштабные конденсации в межзвездных молекулярных облаках, где температура T = 5-20 К и концентрация молекулярного водорода $n = 10^3 - 10^6$ см⁻³.

1). Определите критический радиус $R_{кр}$ и критическую массу $M_{кр}$ газового облака, начиная с которых облако становится гравитационно-неустойчивым, т.е. будет сжиматься под действием собственного гравитационного поля. Численные оценки $R_{кр}$ и $M_{кр}$ получите при температуре межзвездной среды T = 10К и концентрации водорода $n = 10^9$ м$^{-3}$. 2). Оцените время сжатия (в годах) протозвездного облака до его превращения в звезду.
Объем облака с характерным размером R оценивается как $V \approx R^3$.
Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} (Н \cdot м^2)/кг^2$.
Универсальная газовая постоянная $R^* = 8{,}31$ Дж/(мольК).
Число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.
Молярная масса молекулярного водорода $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
1 год $\approx 3 \cdot 10^7$ с.

Решение

Облако будет гравитационно неустойчивым, если гравитационное давление в центре облака будет превышать давление газа: $P_{гр} \geq P_{газ}$. В развернутом виде -

$$\rho g R \geq \frac{\rho R^* T}{\mu}. \qquad \textbf{(1б)} \qquad (1)$$

Т.к. $g \approx GM/R^2$, $M \approx \rho R^3 = m_0 n R^3$, $m_0 = \mu / N_A$ - масса молекулы, из (1) получаем:

$$R \geq R_{кр} = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{R^* N_A T}{G n}} \approx 10^{16} \text{ м.} \qquad \textbf{(3б)} \qquad (2)$$

Соответствующая этому радиусу критическая масса облака

$$M_{кр} \approx \frac{\mu}{N_A} \cdot n R_{кр}^3 \approx 3 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 1{,}5\ M_\Theta \qquad \textbf{(1б)} \qquad (3)$$

Время сжатия протозвездного облака от радиуса (6.2) до радиуса $R \ll R_{кр}$ можно оценить, основываясь на соображениях размерностей:

$$\tau \approx \sqrt{\frac{R_{кр}^3}{G M_{кр}}} \approx 7 \cdot 10^{13} \text{ с} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ лет.} \qquad \textbf{(2б)} \qquad (4)$$

11-4. Релятивистская звезда.
Давление в центре однородной релятивистской звезды радиуса *R* и массы *M* определяется формулой

$$P_c = \rho c^2 \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{R_g}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{R_g}{R}} - 1}$$

где ρ – плотность вещества звезды, $R_g = \frac{2GM}{c^2}$ - ее гравитационный радиус. Полагая, что уравнение состояния вещества в центре звезды имеет вид $P_c = \nu \rho c^2$, где ν – постоянная, определите радиус R звезды, выразив его через гравитационный радиус R_g при ν = 1/3. Вычислите массу M этой звезды (в единицах солнечной массы $M_\Theta = 2 \cdot 10^{30}$ кг) при ее радиусе R = 12 км.
Гравитационная постоянная: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (Н·м^2/кг^2). Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение

1). Из уравнения

$$\nu\rho c^2 = \rho c^2 \cdot \frac{1 - \sqrt{1-\dfrac{R_g}{R}}}{3\sqrt{1-\dfrac{R_g}{R}} - 1} \qquad \textbf{(1б)}$$

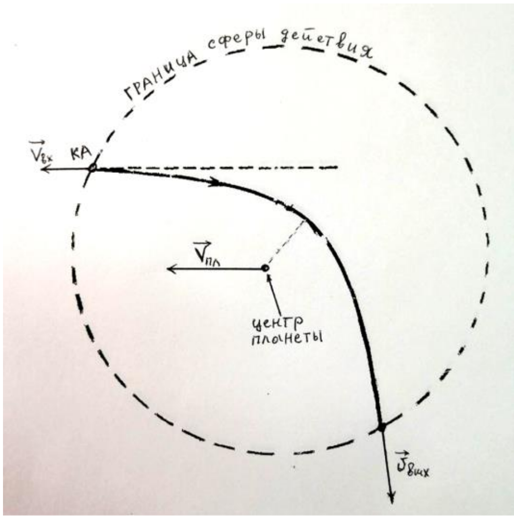
следует, что

$$\frac{R_g}{R} = 1 - \left(\frac{\nu+1}{3\nu+1}\right)^2$$

При ν = 1/3 радиус звезды определится так: $R = \frac{9}{5}R_g$ **(5б)**

2). Масса звезды: $M = \frac{5Rc^2}{18G} = 2,25M_{\odot}$ **(2б)**

11-5. Движение КА внутри сферы действия планеты.



Космический аппарат (КА) входит в сферу действия Юритера со скоростью $V_{вх}$ = 7 км/с относительно Солнца. Скорость Юпитера относительно Солнца $V_{пл}$ = 13 км/с. Вектор скорости входа параллелен вектору скорости планеты. Таким образом, сфера действия планеты догоняет КА.

1). Какой будет скорость входа $v_{вх}$ КА в сферу действия относительно планеты?

2). По какой траектории будет двигаться КА внутри сферы действия?

3). С какой скоростью $v_{вых}$ относительно Юпитера КА выйдет из сферы действия?

Радиус сферы действия Юпитера $r_d = 4{,}8\cdot10^{10}$ м.

Масса Юпитера $M = 2\cdot10^{27}$ кг.

Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ (Н·м²/кг²).

Решение

1). Теорема сложения скоростей: $\mathbf{V_{вх}} = \mathbf{V_{пл}} + \boldsymbol{v_{вх}}$, или в проекциях на горизонталь (ось координат OX направлена по вектору $\mathbf{V_{пл}}$): $V_{вх} = V_{пл} + v_{вх.x.}$ Следовательно,
$v_{вх.x} = V_{вх} - V_{пл} = -6$ км/с. Таким образом, КА входит в сферу действия Юпитера со скоростью $v_{вх}$ = 6 км/с относительно Юпитера, причем вектор этой скорости направлен противоположно вектору скорости Юпитера. **(2б)**

2). Параболическая скорость на границе сферы действия $v_{пар} = \sqrt{\frac{2GM}{r_d}} \approx 2,4\,км/с$. **(2б)**

Так как $v_{вх} > v_{пар}$, то КА будет двигаться внутри сферы действия по гиперболической траектории. **(1б)**

3). На основании закона сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = Const$, **(2б)**

можно утверждать, что $v_{вых} = v_{вх}$ = 6 км/с. **(1б)**

11-6. От соединения до противостояния.
В противостоянии блеск планеты увеличился на 0,85 звездной величины по сравнению с блеском в соединении. Сколько суток планета двигалась от соединения до противостояния? Все орбиты считать круговыми.

Решение

1. Очевидно, что речь идет о внешней (верхней) планете. Если обозначить радиус орбиты внешней планеты как a и измерять ее в астрономических единицах, то расстояние от Земли до планеты в соединении будет $r_с = a + 1$, а в противостоянии $r_п = a - 1$. Именно разница этих расстояний дает увеличение блеска на $\Delta m = 0{,}85$ звездной величины.

Блеск I обратно пропорционален квадрату расстояния:

$$\frac{I_n}{I_c} = \left(\frac{r_c}{r_n}\right)^2$$

Но, согласно формуле Погсона:

$$\frac{I_n}{I_c} = 2{,}512^{\Delta m}$$

(В данном случае важно правильно задать отношение блесков, поскольку обратное отношение даст нам отрицательное значение Δm.) Приравнивая правые части этих уравнений, получим:

$$\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 = 2{,}512^{\Delta m}$$

Правая часть в выбранных единицах измерения численно равна примерно 2,2. Преобразуем записанное уравнение в квадратное:

$$a^2 - 5{,}3a + 1 = 0$$

Уравнение имеет действительные корни: $a_1 = 5{,}1\ а.е. и\ a_2 = 0{,}2\ а.е.$ Второе значение нас не интересует, поскольку оно характеризует внутреннюю (нижнюю) планету. (За правильное решение этой части задачи присваивается **4 балла**, за не совсем точное и не совсем корректное **от 1 до 3 баллов** по коллегиальному решению жюри.)

2. Очевидно, что искомое количество суток будет равно половине синодического периода внешней планеты. Сидерический период обращения планеты вокруг Солнца в годах найдем по третьему закону Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1$$

$$T = \sqrt{a^3}$$

T = 11,5 лет; а синодический период – по формуле для синодического периода внешней планеты:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{Земли}} - \frac{1}{T_{планеты}}$$

Получаем S = 1,1 лет или чуть менее 402 суток. То есть планета двигалась от соединения до противостояния 200 суток с небольшим. (За правильное решение этой части задачи также присваивается **4 балла** с аналогичными оговорками.)